

# 5

## minuten wiskunde

ICLON  
Universiteit Leiden

Vakdidactisch  
ontwerponderzoek

Jason Zijlstra  
1170449

Begeleiders:  
Drs. P.M.G.M. Kop  
Dr. M. Dam

Datum:  
10-01-2018



"Je ziet nu wel dat wiskunde echt veel wordt gebruikt, zelfs bij Netflix."

-Leerling 1

"Ik denk vaak bij wiskunde: wat heb je hieraan? En als je het dan ook niet leuk vindt dan heb je nog minder zin om het te snappen. Dus als je het zo toegepast ziet dan denk je: oh, het is toch wel ergens nuttig voor."

-Leerling 2

"De onderwerpen waren heel actueel daarom vond ik het heel interessant omdat de onderwerpen mij ook aangaan. Als het over de krant ging, dan had ik het niet leuk gevonden."

-Leerling 3

"Ik denk dat het handig was want ik dacht nooit dat je wat met wiskunde kon. Ik denk altijd: als je ergens bent ga je echt niet de inhoud van een cirkel berekenen."

-Leerling 4

"Ik dacht dat er gewoon een sensortje in zat die een beetje je hoofd scant."

-Leerling 5

## Samenvatting

In dit vakdidactisch ontwerponderzoek is een methode onderzocht met het doel om bovenbouwleerlingen meer inzicht te geven in het nut en de brede toepasbaarheid van het vak wiskunde in het dagelijks leven. De voorgestelde methode in dit onderzoek, vijf minuten wiskunde, maakt gebruik van de kracht van nieuwsgierigheid om leerlingen te motiveren voor het vak. In dit onderzoek is een lessenserie van vijf minuten wiskundelessen ontworpen. In deze lesjes vertelt de docent over, voor leerlingen, boeiende onderwerpen (Netflix, Snapchat en Shazam) en de rol van wiskunde daarin. Dit onderzoek bevat een logboek waarin heuristischeken zijn genoteerd die gebruikt kunnen worden door docenten om een vijf minuten wiskundeles te ontwerpen. In dit logboek staan heuristischeken voor zowel de onderwerpkeuze als het ontwerpen van de vijf minuten wiskundeles, waarin de ontwerpheuristischeken zijn opgedeeld in drie fases. Aan de hand van leerlingendata is onderzocht of (i) de leerlingen de lessen als positief ervaren, (ii) de leerlingen een betere kijk op de toepasbaarheid van wiskunde hebben gekregen en (iii) de leerlingen de nieuwe inzichten nuttig en waardevol vinden. We hebben geconcludeerd dat de ontworpen methode voldoet aan punt (i) en (ii) maar niet aan punt (iii) door een gebrek aan herkenning van wiskundige formules.

## Inleiding

*"Er zijn tenslotte ongeveer 2000 uren van schoolwiskunde om mee te spelen gedurende verplichte schooltijd. Natuurlijk kunnen we het ons veroorloven om iets ambitieuzer te zijn in de variëteit van ideeën en benaderingen van wiskunde die we aanbieden!"*

-Paul Ernest (Ernest (2010))

Als afgestudeerd wiskundige ben ik het volledig met deze uitspraak van Ernest eens. Wiskunde is een centraal element van cultuur, kunst, leven, verleden en toekomst, wat de wetenschap, techniek en alle aspecten van de menselijke cultuur doordringt en onderbouwt (Ernest (2010)). De wiskundige toepassingen die ik als student heb onderzocht variëren van de verste sterrenstelsels in het heelal tot het voorspellen van onze levensverwachting in pensioen- en verzekeringsmodellen. Nu ik, als student aan de lerarenopleiding, blader door de schoolboeken zie ik helaas weinig terug van deze centrale rol en de rijke variëteit aan wiskundige toepassingen.

In Ernest (2000) wordt beargumenteerd dat bekwaamheid belangrijker wordt gevonden dan waardering in het wiskundeonderwijs. Ernest definieert "waardering voor wiskunde" in zeven elementen en volgens Ernest verlaten veel leerlingen de school zonder ooit te zijn blootgesteld aan, of te hebben gedacht over, een van die zeven elementen.

In Kloosterman (2002) wordt gesproken van de "leerling-overtuiging" over wiskunde: iets wat de leerling weet of voelt wat hun inspanning om wiskunde te leren beïnvloedt. Deze overtuigingen van leerlingen kunnen een substantiële impact hebben op hun interesse in wiskunde, hun plezier in wiskunde en hun motivatie in de wiskundeles (Kloosterman (2002)).

Aangenomen dat een positieve overtuiging over wiskunde hand in hand gaat met een positieve waardering voor het vak, wil ik in dit onderzoek de motivatie en interesse voor het vak bij de leerlingen verhogen door de waardering voor het vak bij de leerlingen te verhogen. Ik laat me daarbij inspireren door iets waar de leerling van tegenwoordig maar al te graag volledig in opgaat<sup>1</sup>: de smartphone.

---

<sup>1</sup> "Helpt 12-16 jarigen vindt zichzelf verslaafd aan sociale media" - nos.nl 08-01-2018

## 1. Theoretisch kader

### 1.1 De kracht van nieuwsgierigheid

Om de waardering voor het vak wiskunde te verhogen kijken we in dit onderzoek wat we kunnen leren van de drijvende krachten achter de smartphone. Al lang voordat de smartphone bestond werd de vraag wat leren leuk, boeiend en interessant maakt onderzocht. Het onderzoek in Malone (1981) staat dicht bij mijn vraag wat leerlingen zo boeiend vinden aan hun smartphone. Thomas W. Malone heeft onderzoek gedaan naar de vragen:

- Waarom zijn computerspellen zo boeiend?
- Hoe kunnen de kenmerken die computerspellen zo boeiend maken gebruikt worden om leren, in het bijzonder leren met computers, interessant en leuk te maken?

In Malone (1981) wordt beargumenteerd dat uitdaging, fantasie en nieuwsgierigheid de belangrijkste drijvende krachten zijn achter computerspellen. Deze drie drijvende krachten achter computerspellen worden in Malone (1981) uitgebreid onderzocht in het licht van zijn tweede onderzoeksvraag. In de onderwijsliteratuur is er, naast Malone (1981), veel te vinden over de relatie tussen "gaming" en onderwijs. In dit vakdidactisch ontwerponderzoek zal echter niet de nadruk liggen op deze relatie. De geïnteresseerde lezer wordt doorverwezen naar McClarty et al. (2012) voor een overzicht van de literatuur over dit onderwerp.

In dit vakdidactisch ontwerponderzoek wil ik inzoomen op de drijvende kracht van nieuwsgierigheid waar in Malone (1981) over wordt geschreven. Deze keuze komt voort uit mijn persoonlijke ervaringen als docent wiskunde. Als wiskundestudent heb ik het een en ander voorbij zien komen aan toepassingen waar ik van te voren niet van had gedacht dat wiskunde zo'n grote rol in die toepassingen zou spelen als daadwerkelijk bleek. In mijn werk als docent heb ik gemerkt dat leerlingen positief verrast reageren wanneer ik vertelde over een, voor leerlingen, boeiend onderwerp en de rol van wiskunde daarin. Deze positieve reacties vanuit de leerlingen wil ik als uitgangspunt nemen voor dit onderzoek. Door boeiende en, voor leerlingen, interessante toepassingen van wiskunde te introduceren wil ik nieuwsgierigheid voor het vak bij de leerlingen kweken.

### 1.2 Nieuwsgierigheid en intrinsieke motivatie

In paragraaf 1.1 is beargumenteerd dat we gebruik maken van de kracht van nieuwsgierigheid om de waardering voor het vak wiskunde te verhogen. Deze opgewekte nieuwsgierigheid kan vervolgens dienen om het verwerven van kennis en leren te motiveren (Kidd & Hayden (2015)). Uit Middleton & Spanias (1999) leren we dat het bieden van kansen voor leerlingen om intrinsieke motivatie in de wiskunde te ontwikkelen over het algemeen superieur is aan het bieden van

extrinsieke prikkels voor prestatie. Dit sluit mooi aan bij Malone (1981): "Eén van de meest belangrijke kenmerken van intrinsiek motiverende omgevingen is de mate waarin het onze nieuwsgierigheid blijft opwekken en bevredigen."

Het in paragraaf 1.1 gedefinieerde uitgangspunt in dit onderzoek waarin de docent boeiende toepassingen introduceert, wordt in kracht bijgezet door Middleton & Spanias (1999). In dit artikel wordt gewezen op de sterke invloed van de wiskundedocent op de motivatie van de leerlingen. Een wiskundedocent met veel kennis over het vak heeft in mijn optiek een krachtig wapen in handen: zichzelf. Om als docent zo effectief mogelijk de leerlingen intrinsiek te motiveren voor het vak, worden in de volgende paragraaf een aantal inzichten uit de literatuur uiteengezet.

### 1.3 Literatuur over intrinsieke motivatie

In Middleton & Spanias (1999) wordt beargumenteerd dat de intrinsieke motivatie wordt vergroot als leerlingen in gaan zien dat de wiskunde die zij leren nuttig is, zowel voor nu maar ook voor hun toekomstige carrière. Docenten moeten kennis en vaardigheden aanleren die het waard zijn om te leren. Met andere woorden, studenten moeten begrijpen dat de wiskunde-instructie die ze krijgen nuttig is, zowel in directe termen als in de voorbereiding om meer te leren op het gebied van wiskunde en op gebieden waarop wiskunde kan worden toegepast (bijv. Natuurkunde, economie, enz.). Gebruik van matig gestructureerde, realistische probleemsituaties waarin het gebruik van wiskunde leidt tot het ontdekken van belangrijke en interessante kennis, bevordert dit begrip.

Uit Middleton & Spanias (1999) halen we ook dat het matchen van activiteiten met de interesse van studenten de intrinsieke motivatie verhoogt. Boekaerts (2010) sluit zich hierbij aan door te stellen dat studenten meer gemotiveerd zijn om deel te nemen aan het leren wanneer zij het onderwerp waarderen en een duidelijk doel hebben.

In Brophy (2004) wordt beschreven dat sociale settingen de intrinsieke motivatie bevorderen wanneer ze voldoen aan de behoeften van mensen op het gebied van autonomie, competentie en verwantschap. In hetzelfde artikel wordt ook genoemd dat de leeractiviteiten in feite goed afgestemd moeten worden op de niveaus van kennis en vaardigheden van de leerling. In Boekaerts (2010) wordt beargumenteerd dat studenten meer gemotiveerd zijn om deel te nemen aan het leren wanneer ze positieve emoties ervaren tegenover leeractiviteiten.

Afsluitend refereren we naar Ernest (2010) waarin de vraag ter discussie wordt gesteld of het doel om wiskundige waardering onder leerlingen te verhogen wel haalbaar is op school. Ernest haalt het argument aan dat grote wiskundige ideeën te moeilijk kunnen zijn voor leerlingen, maar roept ook op om de capaciteiten van leerlingen en docenten niet te onderschatten.

#### 1.4 Onderzoeksvraag

In dit onderzoek wordt dus onderzocht hoe wiskundedocenten de waardering voor het vak onder de leerlingen kunnen vergroten door nieuwsgierigheid op te wekken. Het doel van deze opgewekte nieuwsgierigheid is om de intrinsieke motivatie van leerlingen te vergroten.

Belangrijke uitdagingen in dit onderzoek zijn het vinden van, voor leerlingen, boeiende toepassingen maar ook het begrijpelijk maken van moeilijke wiskunde voor de leerlingen. Bovendien moet dit ook in een kort tijdsbestek gebeuren om niet teveel tijd in te nemen van de reguliere lessen. De onderzoeksvraag van dit vakdidactisch ontwerponderzoek is daarom als volgt geformuleerd:

*Hoe kunnen we in een kort tijdsbestek per les op een begrijpelijke manier de leerlingen kennis laten maken met boeiende en interessante wiskundige toepassingen om de motivatie voor het vak te verhogen?*

We beantwoorden de onderzoeksvraag door twee deelvragen te onderzoeken:

1. Hoe ontwerp je een passend (kort, boeiend en begrijpelijk) format wat bruikbaar is in de wiskundeles?
2. Leidt dit format tot een verhoogde intrinsieke motivatie voor het vak wiskunde?

Deelvraag 2 wordt als voldoende beantwoord beschouwd wanneer we het volgende uit de data kunnen constateren:

- (i) De leerlingen maken positieve opmerkingen (leuk, interessant) over de vijf minuten wiskundelessen.
- (ii) Leerlingen hebben het gevoel dat ze een betere kijk op de toepassingen van wiskunde in de praktijk hebben.
- (iii) Leerlingen vinden de nieuwe inzichten nuttig en waardevol.



## 2. Methode

Om antwoord te geven op de onderzoeksvraag uit Paragraaf 1.4 wordt er in dit hoofdstuk een lessenserie ontworpen gebaseerd op een aantal ontwerpcriteria. Deze ontwerpcriteria zijn zowel gebaseerd op de theorie als op de praktijk. We sluiten het hoofdstuk af met het beschrijven welke data in het onderzoek wordt verzameld en hoe deze data wordt geanalyseerd.

### 2.1 Ontwerpcriteria uit de literatuur

De theoretische ontwerpcriteria in deze paragraaf zijn gebaseerd op de literatuur uit het theoretisch kader. Achter ieder ontwerpcriteria vermelden we de bron waarop het criteria is gebaseerd. Ontwerpcriteria 1 korten we af met **(C1)**.

**(C1)**: Docenten moeten kennis en vaardigheden aanleren die het waard zijn om te leren. Studenten moeten het gevoel krijgen dat de wiskunde-instructie nuttig is voor nu maar ook in interessante toepassingen. Gebruik van matig gestructureerde, realistische probleemsituaties waarin wiskunde een centrale rol speelt bevordert dit begrip - Middleton & Spanias (1999)

**(C2)**: Het matchen van activiteiten met de interesse van studenten verhoogt de intrinsieke motivatie. - Middleton & Spanias (1999)

**(C3)**: Studenten zijn meer gemotiveerd wanneer zij het onderwerp waarderen en een duidelijk doel hebben. - Boekaerts (2010)

**(C4)**: Sociale settingen bevorderen de intrinsieke motivatie wanneer ze voldoen aan de behoeften van mensen op het gebied van autonomie, competentie en verwantschap. - Brophy (2004)

**(C5)**: Zorg ervoor dat de wiskundige toepassingen goed zijn afgestemd op de niveaus van kennis en vaardigheden van de leerling. - Brophy (2004)

**(C6)**: Studenten zijn meer gemotiveerd wanneer ze positieve emoties ervaren bij de leeractiviteit. - Boekaerts (2010)

### 2.2 Praktische ontwerpcriteria

Gezien de relatief korte periode waarin dit onderzoek moet worden volbracht kiezen we ervoor om drie lessen voor de lessenserie uit te trekken. Zoals beschreven in Hoofdstuk 1 speelt de docent een essentiële rol in de lessenserie, waarbij de docent de leerlingen nieuwsgierig maakt voor het vak door boeiende toepassingen te introduceren. De toepassingen hoeven niet per se gerelateerd te zijn aan de stof van de les. Hier wordt voor gekozen om later in het onderzoek uit een groter scala van toepassingen te kunnen kiezen die voor de leerlingen zo boeiend mogelijk moeten zijn. Om dezelfde

reden is ervoor gekozen om de lessenserie voor klas 4 vwo Wiskunde B te ontwerpen. Het curriculum van Wiskunde B biedt meer mogelijkheden om wiskundige toepassingen te linken aan wiskunde op het voortgezet onderwijs dan het curriculum van Wiskunde A. Ik geef zelf geen les aan een Wiskunde D klas. Indien dat wel het geval was, zou mijn keuze alsnog op Wiskunde B vallen gezien leerlingen in een Wiskunde D klas over het algemeen al sterk intrinsiek gemotiveerd zijn voor het vak wiskunde.

Omdat de gepresenteerde toepassing niet aansluit bij de reguliere les moet de presentatie van de toepassing niet te lang duren zodat er genoeg tijd overblijft voor de reguliere les. Rekening houdend met een korte discussie na afloop kiezen we ervoor om de lessen in de lessenserie de eerste vijf minuten te starten met een minilesje over een boeiende toepassing. Op deze manier kunnen docenten de minilesjes inzetten als extra instrument in een reguliere les, zonder al te veel te snijden in het reguliere programma. Deze minilesjes zullen hierna *vijf minuten wiskunde* worden genoemd. Het ontwerp van de lessenserie kan als volgt worden samengevat:

*In een periode van twee weken worden drie lessen gestart met vijf minuten wiskunde om nieuwsgierigheid voor het vak op te wekken.*

Hieronder vullen we bovenstaand concept verder aan met praktische ontwerpcriteria die we baseren op de theoretische ontwerpcriteria uit Paragraaf 2.1.

Gebaseerd op ontwerpcriteria **(C2)**, **(C3)** en **(C6)** kiezen we ervoor om tijdens de vijf minuten wiskunde de leerlingen nieuwsgierig te maken aan de hand van een "real-life" wiskunde probleem. Met "real-life" doel ik op een onderwerp wat leerlingen van tegenwoordig boeiend en interessant vinden. Om het onderwerp boeiend te maken voor de leerlingen moet het overeenkomen met de interesses van de leerlingen.

Gebaseerd op criteria **(C4)**, **(C5)** en **(C6)** kiezen we ervoor om de wiskunde uit de praktijk te versimpelen naar de leerstof uit het boek, zodat er een brug wordt geslagen van de leerlingen naar de praktijk. Leerlingen zullen extra gemotiveerd raken als ze beseffen dat de wiskunde die nu geleerd wordt, in een versimpelde vorm, op hetzelfde neerkomt als de wiskunde in de praktijk. Dit besef kan positieve emoties opwekken wat de motivatie voor het vak zal versterken.

Met deze praktische ontwerpcriteria in het achterhoofd presenteren we de vijf minuten wiskunde aan de hand van drie componenten:

Component 1: Wie, wat, waar?

- Licht kort en boeiend een "real-life" praktijkvoorbeeld toe.

Component 2: De rol van wiskunde?

- Wat is de rol van wiskunde in dit praktijkvoorbeeld?

Component 3: Leer ik ook zoiets?

- Versimpel de echte wiskunde naar een onderdeel uit het curriculum.

### 2.3 Data verzameling

De dataverzameling in dit onderzoek bestaat uit twee delen:

1. Er wordt een logboek bijgehouden waarin wordt geëxpliciteerd hoe een docent vanuit de gegeven ontwerpcriteria een reeks van drie minilesjes vijf minuten wiskunde ontwerpt.
2. Data afkomstig van de leerlingen wordt verzameld en daaruit kan geanalyseerd worden hoe de reeks van vijf minuten wiskundelessen is ervaren.

Deze twee delen komen overeen met Deelvraag 1 en Deelvraag 2 uit Paragraaf 1.4 respectievelijk.

#### 2.3.1 Logboek

In Paragraaf 2.1 en 2.2 is beargumenteerd dat een reeks van vijf minuten wiskundelessen wordt ingezet om de onderzoeksvraag te beantwoorden. In Paragraaf 2.3.2 wordt aan de hand van leerlingendata onderzocht hoe de leerlingen deze poging tot het opwekken van nieuwsgierigheid hebben ervaren. Ongeacht van de conclusies die later in dit verslag worden getrokken uit deze data, beschrijven we in een logboek hoe docenten de in paragraaf 2.1 en 2.2 beschreven ontwerpcriteria kunnen omzetten in een reeks van vijf minuten wiskunde. Dit logboek bevat een aantal heuristische die gebruikt kunnen worden voor het ontwerpen van een reeks vijf minuten wiskundelessen. Het logboek wordt beschreven in Hoofdstuk 3.

#### 2.3.2 Leerlingendata

In deze paragraaf wordt uiteengezet welke data er wordt verzameld en hoe die data wordt verzameld om te onderzoeken hoe de leerlingen de reeks van vijf minuten wiskundelessen hebben ervaren. Voor dit doeleinde worden twee instrumenten gebruikt. De eerste is een vragenlijst met vragen uit de Intrinsic Motivation Inventory (IMI) (Ryan & Deci (2000)). Om meer inzicht te verkrijgen over de resultaten die volgen uit de IMI vragenlijst, worden er ook leerlingensinterviews afgenomen en geanalyseerd.

#### **Intrinsic Motivation Inventory (IMI)**

IMI is een meetinstrument bedoeld om de subjectieve ervaring van een deelnemer te evalueren gerelateerd aan een activiteit in een experiment. In dit onderzoek maken we gebruik van de twee IMI sub-schalen "interesse/genot" en "waarde/nut". De vragenlijst is bijgevoegd in Bijlage C. Als deelnemers gebruik ik 18 leerlingen uit mijn 4 vwo klas. Dit waren alle aanwezige leerlingen tijdens de les van afname.

### **Leerlingeninterviews**

Het interview wordt minimaal één week na de laatste vijf minuten wiskundeles afgenomen en ook nadat de IMI vragenlijst is ingevuld. Het interview is gebaseerd op een interviewleidraad. De leidraad van het interview zijn van te voren opgestelde vragen. De vragen van het interview zijn te vinden in Bijlage D. In totaal worden er twee interviews afgenomen: twee keer een groepje van vier leerlingen. De leerlingen zijn niet geselecteerd voor de interviews. De participanten hebben zich vrijwillig aangemeld.

### 2.4 Data-analyze

#### **Intrinsic Motivation Inventory (IMI)**

De IMI vragenlijst wordt als volgt geanalyseerd: aan iedere uitdrukking/vraag in Bijlage C wordt een gemiddelde score toegewezen gebaseerd op de leerlingendata. De gemiddelde scores worden in het volgende hoofdstuk gebruikt als een algemene maatstaf voor het trekken van conclusies. Om meer inzicht te verkrijgen over de achterliggende motieven van de gemiddelde scores worden de leerlingeninterviews geanalyseerd.

### **Leerlingeninterviews**

De interviewdata wordt gerepresenteerd aan de hand van een codeboek. In dit codeboek wordt bijgehouden hoe vaak de leerlingen een antwoord geven die in een bepaalde categorie valt. Deze categorieën worden aangeduid als codes. De codes in het codeboek zijn tot stand gekomen met behulp van de techniek "Grounded theory" (Charmaz (2008)). Dit is een inductieve theorie waarin men ervan uit gaat dat herhaalde ideeën of concepten in de data gegrond zitten en dat deze zichtbaar worden door de waargenomen data. Door nauwkeurig de data te analyseren worden waargenomen herhaalde ideeën of concepten geformuleerd in codes. De resultaten van zowel de IMI vragenlijst als de gedecoreerde leerlingeninterviews zijn te vinden in Hoofdstuk 3.

### 3. Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten van de verzamelde data weergegeven: het logboek, de IMI-resultaten en het codeboek van het leerlingeninterview. De belangrijkste resultaten worden aan het eind van dit hoofdstuk samengevat.

#### 3.1 Logboek

In dit logboek worden heuristieken opgesteld die door docenten als hulpmiddel gebruikt kunnen worden om de ontwerpcriteria uit Hoofdstuk 2 om te zetten in een vijf minuten wiskundeles. Er worden heuristieken gegeven voor zowel de onderwerpkeuze als het ontwerpen van de vijf minuten wiskundeles.

##### 3.1.1 Onderwerpkeuze praktijkvoorbeelden

Gebaseerd op criteria **(C2)**, **(C3)** en **(C6)**, is in Hoofdstuk 2 vastgesteld dat de leerlingen nieuwsgierig gemaakt moeten worden met onderwerpen die de leerlingen boeiend en interessant vinden: een "real-life" wiskunde probleem. De vraag is dus: wat vinden leerlingen van tegenwoordig interessant?

In 2016 heeft Google<sup>2</sup> (Brand Team for Consumer Apps) onderzocht wat Amerikaanse tieners tegenwoordig als "cool" beschouwen. Onder de aanname dat Nederlandse tieners vergelijkbaar zijn met de tieners uit Amerika, heb ik ervoor gekozen om de praktijkvoorbeelden over de volgende categorieën te houden: Technologie (smartphone apps), Muziek en Media Entertainment. Iedere categorie wordt toegewezen aan één les in de lessenserie.

In Bijlage A1 staat in een korte uiteenzetting beschreven welke onderwerpen ik per categorie heb gekozen en waarom ik die onderwerpen heb gekozen. Voor de categorieën Technologie, Muziek en Media Entertainment heb ik respectievelijk de onderwerpen Snapchat, Shazam en Netflix gekozen. Op basis van Bijlage A1 zijn hieronder een aantal heuristieken beschreven die gebruikt kunnen worden bij de keuze van een geschikt onderwerp.

#### **Heuristieken bij onderwerpkeuze:**

Voor het vinden van onderwerpen die leerlingen boeiend en interessant vinden raad ik als eerste aan om zoveel mogelijk gebruik te maken van bestaande onderzoeken en/of boeken die gericht zijn op dit vraagstuk. Met eigen observaties in de klas en eigen interesse voor wiskundige toepassingen kan vervolgens de focus gelegd worden op vragen als: "wat speelt er onder de leerlingen?" en "welke onderwerpen zijn wiskundig geschikt om te versimpelen naar het voortgezet onderwijs?".

---

<sup>2</sup> <https://storage.googleapis.com/think/docs/its-lit.pdf>

### 3.1.2 Ontwerpen van een vijf minuten wiskundeles

Hieronder worden heuristieken beschreven die zijn ontstaan tijdens het ontwerpen van de reeks vijf minuten wiskundelessen. De heuristieken zijn verdeeld in drie fasen: een oriëntatie-, verdiepings- en constructiefase. De heuristieken in de verdiepings- en constructiefase zijn gebaseerd op criteria **(C4)**, **(C5)** en **(C6)**. Extra informatie over het gebruik van de heuristieken voor ieder onderwerp apart, is te vinden in Bijlage A2.

#### **Heuristieken fase 1 - oriëntatie**

Begin het ontwerp van de vijf minuten wiskundeles met het online zoeken naar websites en/of blogs die de techniek (wiskunde) achter het betreffende onderwerp uiteen hebben gezet. Vaak zit hier al een bruikbare verhaallijn in die je kunt overnemen. Schrijf vervolgens in grote lijnen voor jezelf uit hoe de techniek achter het betreffende onderwerp werkt. Indien nodig: verdiep jezelf in belangrijke facetten van het onderwerp waar je nog onvoldoende kennis over hebt. Schrijf tussendoor leuke/interessante informatie om te vertellen op en bewaar dat.

#### **Heuristieken fase 2 - verdieping**

Nadat je het technische verhaal in grote lijnen hebt opgezet, begin je in fase 2 met de essentiële stap uit het grote plaatje te halen. Verdiep jezelf vervolgens in de wiskunde achter deze stap en bedenk hoe je deze wiskunde in woorden kunt uitleggen. Zoek naar elementen die de leerlingen in een versimpelde vorm kunnen volgen.

#### **Heuristieken fase 3 - constructie**

Maak in de laatste fase een verhaallijn voor de leerlingen door op een leuke manier naar de essentiële wiskundige stap toe te werken. Begin vanuit het uitgangspunt van de leerlingen. Ga ervan uit dat ze niets weten over de achterliggende factoren. Stel jezelf daarom de meest elementaire vragen en geef daar antwoord op. Zoek in het curriculum een hoofdstuk uit waar de wiskunde uit de toepassing in een versimpelde vorm (of een basisonderdeel ervan) terugkomt.

In Bijlage B zijn de presentatieteksten van de drie vijf minuten wiskundelessen te vinden.

### 3.2 IMI gemiddelde scores

In Tabel 1 en Tabel 2 zijn de gemiddelde scores weergegeven van de IMI sub-schaal "interesse/genot" en IMI sub-schaal "waarde/nut". Deze sub-schalen worden hierna respectievelijk sub-schaal A en sub-schaal B genoemd.

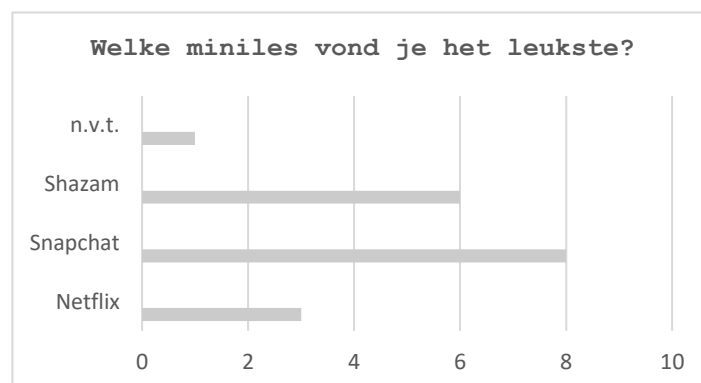
Tag	Uitspraak	Gemiddelde score	Standaard deviatie
(A1)	Ik heb zeer veel genoten van deze activiteit.	4,1	0,8
(A2)	Deze activiteit was leuk om te doen.	4,6	0,7
(A3)	Ik vond dat dit een saaie activiteit was.	3,2	1,1
(A4)	Deze activiteit kon absoluut niet mijn aandacht erbij houden.	3,2	1,1
(A5)	Ik zou deze activiteit beschrijven als heel interessant.	4,4	1,0
(A6)	Ik vond dat deze activiteit nogal leuk was.	4,4	1,0
(A7)	Tijdens de activiteit dacht ik eraan hoe leuk ik deze activiteit vond.	4,6	1,1

Tabel 1: IMI scores sub-schaal A.

Tag	Uitspraak	Gemiddelde score	Standaard deviatie
(B1)	Ik geloof dat deze activiteit voor mij van waarde kan zijn.	3,4	1,3
(B2)	Ik denk dat het doen van deze activiteit nuttig is om beter te begrijpen wat ik in het echte leven met wiskunde kan doen.	4,6	1,6
(B3)	Ik denk dat deze activiteit belangrijk is om te doen omdat het mij meer inzicht geeft wat er allemaal mogelijk is met wiskundige kennis.	4,4	1,4
(B4)	Ik zou bereid zijn om dit weer te doen omdat de activiteit waardevol voor mij was.	3,7	1,4
(B5)	Ik denk dat het doen van deze activiteit mij kan helpen om beter een beeld te vormen van het uiteindelijke doel bij abstracte wiskundesommen.	3,4	1,6
(B6)	Ik geloof dat het doen van deze activiteit gunstig voor mij is.	3,6	1,1
(B7)	Ik denk dat dit een belangrijke activiteit is.	3,6	1,4

Tabel 2: IMI scores sub-schaal B.

De uitslag van de extra toegevoegde vragen in Bijlage C zijn weergegeven in Figuur 1 en Figuur 2.



Figuur 1: Staafdiagram voor de extra vraag "Welke miniles vond je het leukste?"



Figuur 2: Staafdiagram voor de extra vraag "Welke miniles vond je het meest interessant?"

### 3.3 Codeboek leerlinginterview

Om een voorbeeld te geven van de manier waarop de codes tot stand zijn gekomen staat hieronder een tekstfragment van een leerling. Het fragment is opgedeeld in verschillende delen waaraan in dit geval vier codes zijn toegekend.

Fragment	Code
Op zich vond ik het wel leuk.	Code 1: De activiteit was leuk
Het was niet een heel uur dus het was niet te langdradig dus het was lekker kort.	Code 2: Ik kon mijn aandacht bij de activiteit houden.
Daardoor bleef het ook wel interessant.	Code 3: Ik vond de activiteit interessant.
De onderwerpen waren heel actueel daarom vond ik het heel interessant omdat de onderwerpen mij ook aangaan. Als het over de krant ging dan had ik het niet leuk gevonden.	Code 4: De actualiteit van de onderwerpen maakte de activiteit interessant.

Tabel 3: Voorbeeld van coderen.

Bij het opstellen van de codes heb ik inspiratie opgedaan uit de IMI uitspraken gegeven in Tabel 1 en Tabel 2. Code 1, code 2 en code 3 corresponderen bijvoorbeeld met uitspraak **(A2)**, **(A4)** en **(A5)** respectievelijk. In totaal zijn er twaalf codes uit de data opgemaakt die in Tabel 4 met de bijbehorende frequenties staan weergegeven.

	Code	Frequentie
1	De activiteit was leuk	12
2	Ik kon mijn aandacht erbij houden	4
3	Ik vond de activiteit interessant	5
4	De actualiteit van de onderwerpen maakte het interessant	9
5	Ik vond de formules niet interessant	3
6	Er was niets dat ik herkende in de formules	6
7	De formules voegde voor mij wel wat toe	6



8	Herkenning in de formules had de lessen interessanter gemaakt	3
9	Dit herkende ik dus dat vond ik interessant	2
10	Deze activiteit was niet heel nuttig voor mij	3
11	Ik begrijp door de activiteit beter waar wiskunde in het echt nuttig voor is	14
12	Ik had niet verwacht dat wiskunde hierin een rol speelde	4

Tabel 4: Codeboek met frequenties van codes in de data

In Bijlage E zijn per code een aantal fragmenten geselecteerd. In Bijlage F zijn een aantal fragmenten geselecteerd die horen bij de extra vragen uit Bijlage C.

### 3.4 Samenvatting resultaten

In het logboek zijn heuristische opgesteld die antwoord geven op Deelvraag 1 uit Paragraaf 1.4. De resultaten van de leerlingendata verzameld ten behoeve van Deelvraag 2 worden naargelang punten (i), (ii) en (iii) uit Paragraaf 1.4 samengevat.

#### **Resultaat (i)**

Alle uitspraken van sub-schaal A zijn gemiddeld gezien door de leerlingen op de positieve helft<sup>3</sup> van de schaalverdeling gepositioneerd (spiegel de schaalverdeling voor uitspraak **(A3)** en **(A4)**). In Tabel 4 zien we twee duidelijke pieken in de frequentie bij code 1 en code 4. Bovendien zien we in Bijlage F dat de kern van de lesjes bij de leerlingen was blijven hangen.

#### **Resultaat (ii)**

In Tabel 2 zien we dat ook uitspraken **(B2)** en **(B3)** door de leerlingen gemiddeld gezien op de positieve helft van de schaalverdeling worden gepositioneerd. Deze bevinding wordt in kracht bijgezet door de hoogst waargenomen frequentie bij code 11 in Tabel 4.

#### **Resultaat (iii)**

De uitspraken **(B1)**, **(B4)**, **(B5)**, **(B6)** en **(B7)** worden allen door de leerlingen op de negatieve helft van de schaalverdeling gepositioneerd. Opvallend zijn de expliciete verwijzingen naar de formules in Tabel 4. Code 5, code 6 en code 8 duiden erop dat een deel van de leerlingen niet positief terugkijkt op de formules in de presentaties en dat dit met name wordt veroorzaakt door een gebrek aan herkenning. Code 7 laat zien dat sommige leerlingen wel positief zijn over de formules. Uit de fragmenten in Bijlage E bij code 7 volgt dat deze leerlingen juist wel elementen in de formules herkenden. Ook uit de fragmenten uit Bijlage E bij code 9 zien we dat leerlingen positiever gaan kijken naar de toepassing op het moment dat ze elementen herkennen in de wiskunde.

<sup>3</sup> Bij deze indeling bedoelen we met de positieve helft hoger dan 4 gemiddeld en met de negatieve helft lager dan 4 gemiddeld.

## 4. Conclusie en discussie

### 4.1 Conclusie

In dit onderzoek hebben we de onderzoeksvraag onderzocht aan de hand van twee deelvragen. Om Deelvraag 1 te beantwoorden is er een lessenserie van vijf minuten wiskundelessen ontworpen aan de hand van de in Hoofdstuk 2 gegeven ontwerpcriteria. Belangrijke ontwerpcriteria zijn de onderwerpkeuze van de toepassing en de mate waarin de wiskunde is versimpeld naar het niveau van het voortgezet onderwijs. Het logboek in Hoofdstuk 3 bevat heuristische voor docenten om de ontwerpcriteria uit Hoofdstuk 2 om te zetten in een vijf minuten wiskundeles.

In Paragraaf 1.4 zijn de punten (i)-(iii) opgesteld om te verifiëren of Deelvraag 2 voldoende is beantwoord. In dit onderzoek is voor dit doeleinde leerlingendata verzameld aan de hand van een Intrinsic Motivation Inventory vragenlijst en leerlingeninterviews. De belangrijkste resultaten zijn naargelang punten (i)-(iii) in Hoofdstuk 3 samengevat.

Uit resultaat (i) concluderen we dat de leerlingen positief terugkijken op de serie van vijf minuten wiskunde. Op basis van de data kunnen we opmaken dat de leerlingen de lessen over het algemeen leuk en interessant vonden. Punt (i) wordt daarom beschouwd als voltooid in dit onderzoek. Op basis van de relatief hoge frequentie bij code 4 in Tabel 4 sluiten we ons aan bij Middleton & Spanias (1999) en Boekarts (2010) (ontwerpcriteria **(C2)** en **(C3)** respectievelijk), waarin het belang van de onderwerpkeuze wordt benadrukt. De onderstaande leerlingenuitspraak illustreert dit belang:

*"De onderwerpen waren heel actueel daarom vond ik het heel interessant omdat de onderwerpen mij ook aangaan. Als het over de krant ging dan had ik het niet leuk gevonden."*

Gebaseerd op resultaat (ii) beschouwen we punt (ii) ook als voltooid in dit onderzoek. Uit de data kan worden opgemaakt dat de leerlingen een betere kijk op de het nut van wiskunde hebben gekregen door de vijf minuten wiskundelessen. Deze resultaten bevestigen het belang van ontwerpcriteria **(C1)**, waardoor we ons wederom aansluiten bij Middleton & Spanias (1999).

Op grond van resultaat (iii) concluderen we dat punt (iii) niet kan worden beschouwd als voltooid. Veel leerlingen gaven aan problemen te hebben met de formules omdat deze niet herkenbaar voor de leerlingen waren:

*"Het waren dingen die wij nog niet hadden geleerd, daarom snapte ik het niet."*

*"Nu was het meer een vage formule die we ooit een keer zouden krijgen."*

De leerlingen geven middels code 8 en 9 in Tabel 4 zelf aan dat de lessen interessanter zouden worden als ze meer het gevoel van herkenning zouden ervaren. Een andere groep leerlingen (code 7, Tabel 4) bevestigt deze stellingname door aan te geven positief op de lessen terug te kijken omdat ze juist wel formules hebben herkend.

Uit de resultaten gerelateerd aan punt (iii) kunnen we concluderen dat we niet genoeg voor alle leerlingen hebben voldaan aan ontwerpcriterium **(C5)** uit Brophy (2004). Als gevolg ging helaas niet voor alle leerlingen ontwerpcriterium **(C6)** op. Dit zou de lagere scores voor uitspraken **(B1)**, **(B4)**, **(B5)**, **(B6)** en **(B7)** in Tabel 2 kunnen verklaren. Bovendien zou dit ook een verklaring kunnen zijn waarom alle gemiddelde scores op de positieve helft van de schaalverdeling geen één keer boven de vijf uitkomen.

De discussie waar Ernest (2010) op wijst, of het doel om wiskundige waardering onder leerlingen te verhogen wel haalbaar is op school, is dus terecht. Uit dit onderzoek leren we dat de afstemming op het niveau van kennis en vaardigheden van de leerlingen belangrijk is om te voorkomen dat leerlingen afhaken door een gebrek aan herkenning.

#### 4.2 Discussie

In dit onderzoek is er geen willekeurige selectie gemaakt bij het kiezen van de leerlingen voor het interview. Deze keuze is uit nood geboren bij gebrek aan aanmeldingen. Er wordt dus in het onderzoek aangenomen dat de groep van acht leerlingen een realistische representatie van de klas is. De lessen van Snapchat en Netflix duurde langer dan vijf minuten. Hoewel het gelukt was de les van Shazam in te korten, raad ik aan om 10 minuten de tijd te nemen voor deze lessen: 10 minuten wiskunde.

Uit de resultaten kwam naar voren dat punt (iii) door een gebrek aan herkenning van formules niet is voltooid. Op basis van deze conclusie hebben we aantal suggesties voor vervolgonderzoek. In fase 3 van de ontwerpheuristische sporen we aan tot het maken van een verhaallijn voor de leerlingen door op een leuke manier naar de essentiële wiskunde toe te werken. De lessenserie in dit onderzoek bevatte uiteindelijk nog teveel wiskundige formules wat voor de leerlingen op dit moment te hoog gegrepen was. We raden daarom aan om moeilijke wiskundige formules zonder aanknopingspunten voor de leerlingen zoveel mogelijk weg te laten uit het verhaal.

Een andere suggestie is om een 10 minuten wiskundeles (of een serie) in te zetten op het moment dat de leerstof uit het boek overeenkomt met een versimpelde vorm van de wiskunde uit de toepassing. De 10 minuten wiskundeles kan ook worden ingezet op een moment wanneer de relevante stof al is behandeld.

## Referenties

- Boekaerts, M. (2010), "The crucial role of motivation and emotion in classroom learning", in *The Nature of Learning: Using research to Inspire Practice*, OECD Publishing, Paris.
- Brophy, J. (2004). "Self-determination theory of intrinsic motivation: meeting students' needs for autonomy, competence and relatedness", in *Motivating students to learn* (2<sup>nd</sup> Ed.), Mahwah, NJ, Erlbaum.
- Charmaz, K. (2008). "Constructionism and the Grounded Theory", in *Handbook of Constructionist Research*, pp. 397-412.
- Ernest, P. (2000), "Why teach mathematics?", in S. Bramall, & J. White, (Eds.), *Why Learn Maths?* (pp.1-14). London: Bedford Way Papers.
- Ernest, P. (2010), "Why teach mathematics?", in *Professional Educator*, Vol 9, Issue 2 p. 44-47
- Kidd, C. & B. Y. Hayden (2015), "The Psychology and Neuroscience of Curiosity", in *Neuron* 88: 4, 449-460.
- Kloosterman, P. (2002), "Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation", in *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Chapter 15.
- Malone, T.W. (1981). "Toward a Theory of Intrinsically Motivating Instruction," in *Cognitive Science*, 4, p 333-369.
- McClarty, K.L, Orr, A., Frey, P.M., Dolan, R.P., Vassileva, V. & McVay, A. (2012). "A Literature Review of Gaming in Education", in *Pearson's Research Reports*.
- Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). "Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research", in *Journal for research in Mathematics Education*, 65-88.
- Mols, B. & Smeets, I. (2014). "Succesformules", online verkrijgbaar: [https://www.platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2016/10/PWNsuccesformules\\_LowRes.pdf](https://www.platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2016/10/PWNsuccesformules_LowRes.pdf)
- Ryan R.M. & E.L. Deci (2000), "Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well being", in *American Psychologist*, 55, pp. 68-78.

## Bijlage A – Extra informatie logboekheuristieken

### A.1: Onderwerpkeuze per categorie

In deze bijlage een korte uiteenzetting hoe ik per categorie een onderwerp heb gekozen voor de drie lessen in de lessenserie.

- **Technologie (smartphone apps):** om een onderwerp uit te kiezen heb ik de uitkomsten van het Google onderzoek gecombineerd met mijn eigen observaties van wat er speelt onder de leerlingen. Beide wegen leiden tot de populaire app **Snapchat**.
- **Muziek:** naast het onderzoek van Google heb ik ook het boek "Succesformules" (Mols en Smeets (2014)) gebruikt om inspiratie op te doen. Dit boek heeft veel raakvlakken met dit vakdidactisch ontwerponderzoek. Het boek is bedoeld om een klein beetje van de wiskunde die we dagelijks inademen zichtbaar te maken. Eén hoofdstuk is geweid aan een handige muziek applicatie (**Shazam**) die je met een simpele druk op de knop helpt om te ontdekken welk nummer op de radio wordt afgespeeld.
- **Media Entertainment:** net als bij de categorie technologie heb ik het Google onderzoek gecombineerd met eigen observaties. **Netflix** staat in het onderzoek op plaats 2 (onder Youtube), echter hoor ik de leerlingen vaker spreken over Netflix dan Youtube.

Bij het kiezen van de onderwerpen heeft naast bovenstaande argumenten ook meegespeeld in welke mate de onderwerpen afhankelijk zijn van onderliggende wiskundige modellen en in welke mate deze wiskunde te vertalen/versimpelen is naar wiskunde op het voortgezet onderwijs. Deze afweging heb ik gemaakt op grond van mijn eigen inzicht wat ik in de loop der jaren heb opgebouwd door mijn interesse voor wiskundige toepassingen. Ik denk dat veel wiskundedocenten zelf voorkeuren hebben voor informatiebronnen waar inspiratie uit geput kan worden.

Om toch een voorbeeld te geven is de Volkskrant Wetenschap/Technologie bijlage op zaterdag een mooie inspiratiebron. (uitgave 9 december 2017: kunstmatige intelligentie algoritme leert in vier uur beter schaken dan de beste schaakcomputer ter wereld / wiskunde en cryptografie in digitale privacy).

### A.2.1: Ontwerpheuristieken bij vijf minuten wiskunde Netflix

Fase 1:

- Google is your best friend. Zoeken naar "math behind Netflix" geeft veel resultaten.
- Ik kom erachter dat het "recommendation algorithm" het geheime ingrediënt van Netflix is.
- Via deze term kom ik terecht op de volgende websites/blogs die ik kan gebruiken:

- o [http://www.cs.carleton.edu/cs\\_comps/0607/recommend/recommender/svd.html](http://www.cs.carleton.edu/cs_comps/0607/recommend/recommender/svd.html)
- o <http://sifter.org/~simon/journal/20061211.html>

Fase 2:

- De essentiële stap is de "Singular Value Decomposition".
- Deze wiskunde is mij bekend vanuit mijn studie wiskunde.
- De data van Netflix is hoog dimensionaal waardoor het lastig is om het te analyseren.
- De Singular Value Decomposition verlaagt het aantal dimensies naar de meest belangrijke dimensies (singular values).
- Leg de data van Netflix uit aan de hand van assenstelsels. Begin in 2 dimensies. Breidt het uit naar 3 dimensies.
- Leg uit dat de Singular Value Decomposition nieuwe en betere assen uitrekent.

Fase 3:

- De leerlingen herkennen allemaal dat Netflix films voor ze aanraadt (via het recommendation algoritme)
- Dit kan omdat we Netflix data doorgeven.
- Leg uit hoe de data van Netflix eruit ziet.
- Laat zien hoe de data van Netflix gevisualiseerd kan worden.
- Maak de stap naar 3D met de leerlingen.
- Probeer ze uit te leggen dat we 4D niet kunnen voorstellen.
- De nieuwe assen die Netflix uitrekent kunnen geïnterpreteerd worden als een "humor-as" en een "cartoon-as".
- Leg de link naar Getal en Ruimte H10 - meetkunde met vectoren.

## A.2.2: Ontwerpheuristieken bij vijf minuten wiskunde Snapchat

### Fase 1:

- Zoeken naar "math behind Snapchat" geeft mij direct een introductiefilm van Vox Media:  
<https://fstoppers.com/mobile/how-snapchat-filters-work-136678>
- De hele verhaallijn van Vox Media kan ik overnemen.

### Fase 2:

- De essentiële stap is "Face detection": hoe kan de computer zien wat een gezicht is?
- Viola-Jones algoritme is de drijvende kracht. Inlezen:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Viola%E2%80%93Jones\\_object\\_detection\\_framework](https://en.wikipedia.org/wiki/Viola%E2%80%93Jones_object_detection_framework)
- Het algoritme zoekt naar contrastverschillen die kenmerkend zijn in gezichten.
- Wiskunde: het gebruikt Haar-features (rechthoeken zwart/wit) en sommeert de pixel waarden in de vlakken.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Haar-like\\_feature](https://en.wikipedia.org/wiki/Haar-like_feature)
- Breng deze wiskunde in woorden.
- Als er een gezicht is gedetecteerd dan moeten de gezichtskenmerken gelokaliseerd worden.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Active\\_shape\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Active_shape_model)
- Wiskunde: afstandsmaat tussen punten (vectoren)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Mahalanobis\\_distance](https://en.wikipedia.org/wiki/Mahalanobis_distance)

### Fase 3:

- De leerlingen weten meteen waar ik het over heb: ze maken elke dag grappige filmpjes op Snapchat waarin hun gezicht verandert in bijvoorbeeld een eekhoorn.
- Maak een introductiefilmpje op Snapchat als begin van de presentatie.
- Leg direct de link naar gezichtsherkenning. Stel jezelf de meest elementaire vragen:
  - Hoe kan de computer contrasten waarnemen?
  - Hoe ziet de computer een plaatje?
  - Hoe ziet een kleur eruit voor een computer?  
[https://en.wikipedia.org/wiki/RGB\\_color\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/RGB_color_model)
  - Hoe zien mensen kleuren?  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Cone\\_cell](https://en.wikipedia.org/wiki/Cone_cell)
  - Welke contrasten zijn belangrijk?
- Probeer de wiskunde zoveel mogelijk uit het verhaal te laten.
- Werk met illustraties om het verhaal te verduidelijken.
- De afstandsmaat tussen punten krijgen de leerlingen in H8 van Getal en Ruimte. Ook worden er vergelijkingen van ruimtelijke figuren in dat hoofdstuk behandeld. Maak de link naar de rechthoekjes.

### A.2.3: Ontwerpheuristieken bij vijf minuten wiskunde Shazam

#### Fase 1:

- Voor dit onderwerp heb ik het boek Succes Formules (Mols & Smeets (2014)) gedownload.
- De verhaallijn van het hoofdstukje over Shazam kan ik overnemen.

#### Fase 2:

- In Mols & Smeets (2014) wordt de essentiële stap duidelijk aangegeven: Shazam maakt slim gebruik van de digitale vingerafdruk van muziek.
- De wiskunde hierachter is een spectrogram die verkregen wordt met Fourier Transformaties.  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrogram>  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform)
- Wat kan ik vertellen over een spectrogram? Shazam gebruikt dit als de vingerafdruk om liedjes te herkennen.
- Vertel de leerlingen hoe geluid is opgebouwd zodat ze toewerken naar de vingerafdruk die met wiskunde wordt verkregen.

#### Fase 3:

- Begin de presentatie met Shazam. Zet een nummer op en laat de leerlingen uitzoeken met hun telefoon welk nummer het is.
- Leg uit dat Shazam gebruik maakt van de digitale vingerafdruk van het nummer. Dit kunnen ze meten.
- Begin met de simpele vraag: Hoe meet je muziek?
- Elementaire vragen:
  - Wat is geluid?
  - Hoe ziet geluid eruit?
- Laat de wiskunde zo makkelijk mogelijk.
- De Fourier Transformaties maken de vingerafdruk. Maak er een verhaal van: de transformaties kunnen gezien worden als een inspecteur met een grote koffer vol met verschillende soorten geluidsgolven.
- De inspecteur houdt bij welke golfjes worden gebruikt met streepjes: dit resulteert in de vingerafdruk.
- De geluidsgolven zijn sinus functies die in H7 van Getal en Ruimte worden bestudeerd.
- Leerlingen gaan in H11 van Getal en Ruimte aan de slag met integralen (komen voor in de Fourier Transformatie).



## **Bijlage B - PowerPoint slides met bijbehorende presentatietekst**

B1: Les 1 - Netflix

### **Tekst presentatie Netflix**

#### **1. Wie, wat, waar?**

Vandaag gaan we het over Netflix hebben, jullie allemaal bekend neem ik aan. Wat heel relax is, of sommige vinden het heel vervelend, is dat Netflix voor jou films uitzoekt, of aanraadt. Dit heeft Netflix te danken aan wiskunde.

Ze maken slim gebruik van de data die wij aan Netflix met miljoenen tegelijk doorgeven.

#### **Assenstelsel**

Dit is jullie allemaal bekend een assenstelsel met x en y. Wat Netflix doet is de x en y-as vervangen door de rating voor verschillende films.

Dat blauwe stipje staat voor de data voor één persoon en wie weet wat dat stipje betekent?

In dit plaatje zie je duizenden gebruikers op dezelfde manier weergegeven.

Nu zijn er natuurlijk ook duizenden films, niet alleen maar Phineas & Ferb en Spongebob. Hier zit eigenlijk de moeilijkheid van het probleem, we kunnen ons dat helemaal niet voorstellen? Hier zie je bij twee films nog dat dit een groepje is, en hier nog één. Maar bij vier films kunnen we het al niet eens meer visualiseren, we kunnen als mensen helaas niet in 4D kijken, laat staan in 1000 D. Gelukkig kunnen we wel nog in 3D dingen bedenken en dat ziet er zo uit. Als we nog een film erbij nemen, Star Wars, dan is een gebruiker nu een puntje in de 3D ruimte. Het idee werkt nog hetzelfde: 5 stapjes voor Star Wars, 5 stapjes voor Phineas & Ferb en 4 voor Spongebob. Je ziet nu dat de structuur in de data steeds ingewikkelder gaat worden, als we straks vier films hebben kunnen we het niet eens meer zien. Dat maakt het voorspellen moeilijk.

Gaan we weer terug naar 2 films voor het gemak. Wat heeft Netflix nou gedaan om slim te voorspellen? Ze gaan nieuwe assen aanmaken die veel beter de structuur van de data weergeven. Als we nou assen maken die meten of je van humor en cartoons houdt dan zie je dat dit al veel meer in de richting zit van de data structuur.

Uiteindelijk worden er dan 10 of 20 belangrijke assen aangemaakt die de data als het ware volgen.

Het aanmaken van die assen is natuurlijk niet even zomaar wat kiezen, daar komt een heleboel wiskunde bij kijken. Ik ga jullie nu laten zien welke wiskundige technieken en stellingen daarvoor

gebruikt zijn. Dit is wiskunde dat jullie over 7/8 jaar zouden kunnen begrijpen als je wiskunde zou gaan studeren. Dit zijn nog oude sheets van mijn opleiding op de TU Delft.

De **Singular Value Decomposition** maakt de nieuwe slimme assen aan. Hier zien we de stelling die uiteindelijk voor iedere gebruiker voorspelt welke rating je zou geven aan een film.

### **Leer ik ook zoiets?**

De echte wiskunde natuurlijk niet op de middelbare school, maar jullie leren wel de belangrijkste basiselementen om dit uiteindelijk te kunnen doen. Je kan het zien als het begin.

**PowerPoint sheets apart bijgevoegd als Les1.ppt  
Opname van de les is in Kaltura geüpload.**

## B2: Les 2 - Snapchat

Waar we het vandaag over gaan hebben wordt dit keer door een goede vriend van mij aangekondigd. [Filmpje sheet 2]

### **1. Wie, wat, waar?**

Vandaag ga ik jullie vertellen hoe Snapchat jullie gezicht kan vervormen en welke wiskunde ze daarvoor gebruiken.

Om van je gezicht iets anders grappigs te maken is het natuurlijk noodzakelijk dat Snapchat jouw gezicht herkent. Voor mensen is dat niet zo'n moeilijke opgave, sterker nog we zijn daar ontzettend goed in. Maar hoe doet je telefoon dat zo snel? Of met andere woorden: hoe doet het computertje in je telefoon dat zo snel?

Natuurlijk gebruikt de telefoon de camera daarvoor om waar te nemen. Je telefoon moet eigenlijk doen wat onze zintuigen doen. Op ons netvlies zitten kegelcellen die rood, groen en blauw licht detecteren. Met die drie kleuren kan je alle kleuren maken die je wilt, ook wel het RGB kleurenmodel genoemd. Die kegeltjes geven dan door aan onze hersenen hoeveel we van elke RGB kleur we moeten mengen om de juiste kleur te zien.

Onze telefoons hebben deze complexe kegelzenuwcellen niet waardoor de telefoon dit mengsysteem na moet gaan doen. Hiervoor gebruiken we een assenstelsel waarbij de kleuren rood, groen en blauw allemaal een eigen as hebben. Je ziet dat je weer een 3D-figuur krijgt zoals bij Netflix waar alle assen de filmratings waren. In dit geval is ieder punt in dit assenstelsel een kleur, bijvoorbeeld dit groene puntje hier. We kunnen ook precies zien hoe het is gemengd uit de RGB kleuren door de coördinaten af te lezen. Met andere woorden: als je telefoon deze drie getalletjes ziet dan weet het precies welke kleur groen je moet hebben.

De telefoon weet nu hoe het kleuren kan zien maar nog steeds niet hoe het een gezicht moet herkennen. Snapchat gebruikt een hele slimme truc om uit de getallen gezichten te herkennen. Ieder gezicht heeft contrastverschillen: op sommige plekken is het donkerder dan de andere plekken. Alle gezichten op de wereld hebben een aantal plekken gemeen waar dezelfde contrastverschillen zitten.

Je neus is iets lichter vergeleken met de gebieden links en rechts van je neus. Het gedeelte net onder je ogen is weer iets donkerder dan je wang zelf. Daar zijn nog veel meer voorbeelden van. Om te kijken of het plaatje een gezicht is, gebruikt je telefoon modelpatronen. Dat zijn patroontjes met contrastverschillen in de vorm van rechthoekjes, dit worden Haar features genoemd.

Jullie weten als geen ander dat je telefoon een fractie van een seconde nodig heeft om je hele gezicht te gaan matchen met deze patronen. Dat matchen wordt gedaan door een waarde te geven aan de patronen. Die waarde krijg je door alle getalletjes die je telefoon ziet in het zwarte gedeelte bij elkaar op te tellen en alle getalletjes in het witte gedeelte bij elkaar op te tellen. Vervolgens trek je die twee van elkaar af om een waarde voor het contrast te krijgen. Wiskundig opgeschreven ziet dat er zo uit.

Je telefoon scant het hele plaatje en als de juiste contrastwaarden worden gevonden dan weet je telefoon dat het een gezicht bekijkt. De volgende stap is het vinden van je gezichtskenmerken. Dat wil zeggen: waar zit je neus precies, waar zitten je ogen precies etc. Als Snapchat heeft gevonden waar je mond zit dan kunnen ze er uiteindelijk een regenboog uit laten vloeien.

Snapchat doet dit door je gezicht met een gemiddeld gezicht te vergelijken. Dat gemiddeld gezicht heeft Snapchat gevonden door het computerprogramma (algoritme) te trainen op duizenden gezichten. Je ziet dat het gemiddelde gezicht niet helemaal klopt met je eigen gezicht. Ook daar heeft Snapchat iets op bedacht. Ze gaan voor elk punt kijken of er in de buurt misschien een beter punt ligt. Daarvoor heeft Snapchat een formule nodig om de afstand tussen twee punten te berekenen. Die ziet er zo uit.

Als dat is gebeurd dan is het hele gezicht gevonden en wordt het vastgezet zodat het met je mee kan bewegen. Snapchat kan nu je gezicht gaan vervormen!

In Hoofdstuk 8 leren jullie om afstanden uit te rekenen tussen twee punten. Je ziet dat dit bijna dezelfde formule is die Snapchat gebruikt om zo goed mogelijk je ogen en oren te vinden. Later in dat hoofdstuk leren jullie om vergelijkingen op te stellen van ruimtelijke figuren, hier bijvoorbeeld van een cirkel. Dat soort vergelijkingen spelen een grote rol bij toepassingen in de praktijk.

**PowerPoint sheets apart bijgevoegd als Les2.ppt  
Opname van de les is in Kaltura geüpload.**

Zou iemand met zijn telefoon voor mij kunnen opzoeken welk nummer dit is? [Sheet 2 speelt een nummer af]

### **1. Wie, wat, waar?**

Vandaag gaan we het over Shazam hebben, de app die je met één druk op de knop vertelt welk nummer er op de radio speelt, of in het café. Misschien dat je jezelf al wel eens hebt afgevraagd hoe het kan dat Shazam zomaar dat liedje na twee seconden herkent. Ik ga jullie laten zien dat Shazam dat allemaal aan wiskunde te danken heeft. Met dit soort wiskunde gaan jullie dit jaar nog kennis maken.

Het geheim van Shazam is dat ze slim kijken naar de muzikale vingerafdruk van een liedje, dat kan je namelijk meten. Dan moeten we eerst kijken hoe je muziek meet.

Muziek is een combinatie van tonen. Het geluid dat je nu hoort is een A-toon. Een toon is een onzichtbare geluidsgolf die er zo uitziet. Iedere toon heeft zijn eigen soort geluidsgolf.

Als je naar een nummer van een band luistert dan hoor je allerlei instrumenten door elkaar heen. Ieder instrument produceert zijn eigen geluidsgolven. Als je al die golven bij elkaar optelt dan hoor je dus het geluid van de band, het witte golfje.

Dat witte golfje zou op zich als vingerafdruk gebruikt kunnen worden maar in werkelijkheid is dat witte golfje bijna onleesbaar. Shazam moet dus nog iets slims doen om er een herkenbare vingerafdruk van te maken en daar komt veel wiskunde bij kijken.

Dit rode golfje stelt nu even een andere band voor. Je ziet dat de rode golf weer is opgebouwd uit meerdere blauwe golven. Nu kunnen we gaan kijken welke wiskunde Shazam gebruikt om erachter te komen naar welk nummer we aan het luisteren zijn. Dat zijn **Fourier Transformaties**. Deze transformaties zien er zo uit.

In woorden kan je op de volgende manier naar die transformaties kijken. Je moet de transformatie eigenlijk zien als een inspecteur die gaat analyseren hoe die rode golf (je geluid) is opgebouwd. Hij heeft een koffer met duizenden golfjes (de blauwe) en die gaat hij één voor één vergelijken met de rode functie. In dit geval heeft hij zes blauwe golfjes uitgekozen wat hij noteert met die streepjes. Die streepjes houden bij welke blauwe golfjes zijn gebruikt maar ook in welke afmeting, ja mag ze namelijk ook vergroten en verkleinen.

Nu is de rode golf niet het geluidssignaal van het hele nummer. Dit is wat we bijvoorbeeld horen op een milliseconde in het nummer. De Fourier Transformaties, de blauwe balkjes, kunnen op ieder tijdstip worden gemaakt. Als het hele nummer is geanalyseerd ziet het er dan als volgt uit.

Dit noemen we een spectrogram en is de muzikale vingerafdruk van het hele liedje, verkregen door de wiskundige Fourier Transformaties. Het is net alsof je naar een berglandschap kijkt. Bergen worden vaak herkend aan de toppen en ook Shazam kijkt naar de toppen. Door te kijken welke toppen er zijn en hoever ze in de tijd uit elkaar liggen kan Shazam herkennen bij welk liedje dit spectrogram hoort.

### **Leer ik ook zoiets?**

De geluidsgolfjes zijn sinusfuncties en in Hoofdstuk 7 gaan we daar dieper op in. In de Fouriertransformaties spelen integralen een belangrijke rol. Wat dat zijn gaan we leren in Hoofdstuk 11.

**PowerPoint sheets apart bijgevoegd als Les3.ppt**  
**Opname van de les is in Kaltura geüpload.**

**Bijlage C - Vragenlijst IMI.**

Geef voor de volgende uitspraken aan in welke mate de uitspraak voor jou "waar" is. Gebruik hiervoor de volgende schaalverdeling:

1                      2                      3                      4                      5                      6                      7

Totaal niet waar                                      Enigszins waar                                      Heel erg waar

**Activiteit:** luisteren naar de drie minilesjes van 10 minuten wiskunde

**Interesse/genot**

- Ik heb zeer veel genoten van deze activiteit.
- Deze activiteit was leuk om te doen.
- Ik vond dat dit een saaie activiteit was. (R)
- Deze activiteit kon absoluut niet mijn aandacht erbij houden. (R)
- Ik zou deze activiteit beschrijven als heel interessant.
- Ik vond dat deze activiteit nogal leuk was.
- Tijdens de activiteit dacht ik eraan hoe leuk ik deze activiteit vond.


**Waarde/nut**

- Ik geloof dat deze activiteit voor mij van waarde kan zijn.
- Ik denk dat het doen van deze activiteit nuttig is om beter te begrijpen wat ik in het echte leven met wiskunde kan doen.
- Ik denk dat deze activiteit belangrijk is om te doen omdat het mij meer inzicht geeft wat er allemaal mogelijk is met wiskundige kennis.
- Ik zou bereid zijn om dit weer te doen omdat de activiteit waardevol voor mij was.
- Ik denk dat het doen van deze activiteit mij kan helpen om beter een beeld te vormen van het uiteindelijke doel bij abstracte wiskundesommen.
- Ik geloof dat het doen van deze activiteit gunstig voor mij is.
- Ik denk dat dit een belangrijke activiteit is.


**Extra vragen:**

Kies steeds uit: **N**(etflix), **S**(napchat), **Sh**(azam) of **nvt** (niet alles gezien)

- Welke miniles vond je het leukste?
- Welke miniles vond je het meest interessant?


**\*: Het onderstreepte is zelf ingevuld op de blanco plekken in de gecertificeerde IMI vragenlijst.**

**\*\*:** De extra vragen zijn niet afkomstig van IMI.

## **Bijlage D - Vragen interview**

Vijf minuten wiskundelessen worden in het interview minilessen genoemd.

1. Hoe heb je de reeks minilessen ervaren?
2. Vinden jullie het vak door deze minilessen nuttiger geworden?  
Kun je uitleggen waarom wel of niet?
3. Welke miniles vond je het leukste en waarom?
4. Welke miniles vond je het meest interessant en waarom?

## **Bijlage E - Geselecteerde fragmenten per code**

Code 1: De activiteit was leuk

- "Ik vond het wel leuk en grappig dat het aan het begin van de les was want meestal ga je aan het begin van de les niet sommen maken. Dus het was een goede inleiding steeds."
- "Ik vond het grappig dat het zo werkt. Ik had nooit gedacht dat ze wiskunde zouden gebruiken bij dat soort dingen."

Code 2: Ik kon mijn aandacht erbij houden

- "Het was niet een heel uur dus het was niet te langdradig dus het was lekker kort. Daardoor bleef het ook wel interessant."
- "Het was kort en krachtig, niet te lang."

Code 3: Ik vond de activiteit interessant

- "Heel erg interessant en leuk."
- "Het was wel interessant om te weten waar je het voor kan gebruiken."

Code 4: De actualiteit van de onderwerpen maakte het interessant

- "De onderwerpen waren heel actueel daarom vond ik het heel interessant omdat de onderwerpen mij ook aangaan. Als het over de krant ging dan had ik het niet leuk gevonden."
- "Dat is de laatste twee jaar helemaal in met die filters. Ik vond het grappig dat met het scannen van je gezicht dat daarbij wiskunde wordt gebruikt."

Code 5: Ik vond de formules niet interessant

- "Dat komt meer omdat ik die formules in die apps totaal niet snapte."
- "Tot de formules want daar kwam je niet ver mee."

Code 6: Er was niets dat ik herkende in de formules

- "Bij die formule dacht ik echt: geen idee."
- "Het was niet zo dat ik dacht bij die formules die je liet zien: dit snap ik."
- "Ik had niet de ervaring: oh, zo doen ze dat!"
- "Het waren dingen die wij nog niet hadden geleerd, daarom snapte ik het niet."
- "Nu was het meer een vage formule die we ooit een keer zouden krijgen."



Code 7: De formules voegde voor mij wel wat toe

- "Ik kon wat dingen uit de formules halen die ik zag. We hebben soortgelijke dingen gezien in wiskunde D."
- "Er was één formule waar ik iets van snapte, voor de rest niet echt. Ik vond het op zich wel grappig want dat zie je ook in je wiskundeboek. Met de verhaaltjes en plaatjes dan weet je wel dat het iets met wiskunde te maken heeft maar niet direct. Met de formules wel dus."
- "Ik denk dat als je die formules en wiskunde erachter ook leuk vindt dat je het dan juist leuk vindt om de formules te zien. Als hier je interesse wel ligt, dan weet je wat je later te wachten staat."

Code 8: Herkenning had de lessen interessanter gemaakt

- "Ik denk als je de formules beter begrijpt dat het dan interessanter is om naar te kijken: ik zag al die tekentjes en dingetjes maar ik had geen idee wat dat allemaal was. Als je het wel begrijpt dan is het wel leuk om te zien."
- "Ik denk dat het leuker is wanneer je bepaalde stof hebt gehad dat je dan hoort waarvoor je het in de praktijk kan gebruiken."

Code 9: Dit herkende ik dus dat vond ik interessant

- "Het meten van grafieken bij Shazam kan ik denk ik wel over drie jaar. Grafieken meten hebben we wel al een beetje gehad. Een grafiek moet wel lukken."
- "Die wortels bij Snapchat die ken ik tenminste."

Code 10: Deze activiteit was niet heel nuttig voor mij

- "Ik denk dat ik het vak niet nuttiger vind. Het is meer een soort bijlesje dat je erbij krijgt. Het voegt niet iets toe denk ik tot de leerstof."
- "Het is niet dat ik denk dat ik er heel veel aan heb, maar ik vroeg me wel altijd af waar wiskunde voor wordt gebruikt en dat weet ik nu wel dus dat vind ik wel leuk."

Code 11: Ik begrijp door de activiteit beter waar wiskunde in het echt nuttig voor is

- "Ik vond het wel leuk om te weten dat daarvoor wiskunde voor wordt gebruikt."
- "Je weet nu wel meer wat je er mee kan maar het heeft mijn kijk op wiskunde niet heel erg veranderd."
- "Ik denk vaak bij wiskunde, bijvoorbeeld bij gebroken vergelijkingen van de les van vandaag, wat heb je hieraan? En als je het dan ook niet leuk vindt dan heb je nog minder zin om het te snappen. Dus als je het zo toegepast ziet dan denk je: oh, het is toch wel ergens nuttig voor."

- "Het was op zich wel leuk om te weten waar het allemaal voor nodig was wiskunde. Dat het toch nog effect had in de wereld."
- "Eerst dachten we dat wiskundigen zich alleen maar opsloten in hun kamertje om nieuwe formules te maken de hele dag. Ik dacht daarom: wiskunde leuk, maar dit ga ik toch niet gebruiken in het dagelijks leven. En nu zie je wel waarvoor je het nodig hebt."
- "Het was wel interessant om te weten waar je het voor kan gebruiken."
- "Ik snapte het niet echt maar het is wel leuk om te weten dat je er wat mee kan als je erin door wilt studeren."
- "Ik denk dat het handig was want ik dacht nooit dat je wat met wiskunde kon. Ik denk altijd: als je ergens bent ga je echt niet de inhoud van een cirkel berekenen."
- "Je ziet nu wel dat het echt veel wordt gebruikt, zelfs bij Netflix."

Code 12: Ik had niet verwacht dat wiskunde hierin een rol speelde

- "Ik vond het grappig dat het zo werkt. Ik had nooit gedacht dat ze wiskunde zouden gebruiken bij dat soort dingen."
- "Snapchat vond ik grappig omdat ik niet had verwacht dat er wiskunde wordt gebruikt bij het scannen van je gezicht."
- "Ik dacht dat er gewoon een sensortje in zat die een beetje je hoofd scant."
- "Shazam omdat ik niet wist dat er zoveel dingen meespeelde om dat liedje te herkennen."

## **Bijlage F -**

### **Fragmenten bij de extra vragen in de enquête van bijlage C**

In Figuur 1 en Figuur 2 zien we dat de les over Snapchat als leukste werd ervaren en de les over Shazam als het meest interessant. Hieronder zijn een aantal fragmenten over Snapchat en Shazam geselecteerd.

Snapchat:

- "Dat is de laatste twee jaar helemaal in met die filters. Ik vond het grappig dat met het scannen van je gezicht dat daarbij wiskunde wordt gebruikt."
- "Snapchat vond ik grappig omdat ik niet had verwacht dat er wiskunde wordt gebruikt bij het scannen van je gezicht."
- "Snapchat het leukste omdat je die zelf het meest gebruikt."

Shazam:

- "Het meten van grafieken bij Shazam kan ik denk ik wel over drie jaar. Grafieken meten hebben we wel al een beetje gehad. Een grafiek moet wel lukken."
- "Interessants Shazam omdat je dan al die grafieken hebt met die verschillende lijntjes dan dacht ik wel van: zo dit is wel echt wiskunde."
- "Shazam omdat ik niet wist dat er zoveel dingen meespeelde om dat liedje te herkennen."

In één van de twee interviews heb ik de leerlingen ook gevraagd wat ze nog wisten over de vijf minuten wiskundeles van Snapchat. Hieronder staan de antwoorden van de leerlingen puntsgewijs weergegeven:

Vraag: kunnen jullie mij vertellen wat je nog weet over de Snapchat les?

- Gezichten herkennen met die puntjes.
- Coördinaten op je gezicht, zoiets.
- Niet elk gezicht is hetzelfde.
- Je had een standaard ding en die plakte je op iemands hoofd en dan aanpassen.
- Er zitten allemaal strepen en blokken op je gezicht.
- Dan kon je zien waar de kenmerken in iemands gezicht waren.

Vraag: kunnen jullie mij vertellen wat je nog weet over de Shazam les?

- Elk lied had een vorm en dat zette je achter elkaar.
- Die vormen leken op bergen.
- Toppen van de bergen berekenen.
- Het had ook allemaal te maken met de tonen.